

非可換確率論

- 奇妙な確率論の研究 -

村木尚文
(総合政策学部)

1. 非可換確率論とは何か

- まず、そもそも確率論とは何か？
→ 極言すると、ランダムな量たち (X, Y, Z, \dots) に対するいろいろな期待値 $(\langle X \rangle, \langle XY \rangle, \dots)$ を計算するための確率モデル(確率現象の数理モデル)
- 確率論が「非可換」であるとは何か？
→ ランダム量 X, Y, Z, \dots が積に関して可換(=交換可能)とは限らない状況
 $XY \neq YX$
を取り込んで作られた確率モデルであるということ
※ ここでランダム量と言っているものは、正式な用語では「確率変数」あるいは「観測量」と呼ばれるものである。
- 非可換確率論はなぜ必要か？
→ ミクロの世界を記述する量子力学においては観測量(物理量)の非可換性が、あらゆる量子効果の起源である。(例、不確定性原理)。量子力学は「確率」的な性格を持っている。
→ 非可換性を取り込んだ「非可換確率論」として量子力学を捕らえなおす試み(=量子確率論)
- 数学としての非可換確率論
非可換確率論は、量子物理に動機付けられて誕生したものであるが、純粋数学として独自に発展して。函数解析学の一分野であり、作用素環論の親戚筋の理論である。

2. 比喩による非可換確率論の説明 確率論のはなしを幾何学のはなしに喩えてみる

- 非可換確率論を、量子力学の観点から説明しようとしても、そもそも量子力学については理工系学部の物理学科目を学んだ経験のある者でないとイメージするのが難しい。
- そこで、ここでは非可換確率論をたとえ話により説明することにした。
→ 確率論の領域における非可換確率論の立ち位置。
幾何学の領域における非ユークリッド幾何学の立ち位置(なぞらえて説明する。
(非ユークリッド幾何学とは相対論や宇宙論で用いられる奇妙な幾何学である))
- 非ユークリッド幾何学とは？
幾何学の領域 ... ユークリッド幾何学 vs 非ユークリッド幾何学
(常識的な幾何学) (奇妙な幾何学)
- 奇妙さの一例 ... 「三角形の内角の和」の性質
(a) ユークリッド幾何学(=学校で学ぶ幾何学)では「三角形の内角の和は180°」であるが正しい。
(b) 非ユークリッド幾何学では「三角形の内角の和は180°よりも小さい」が正しい。
- (一見したところ)互いに相容れない2つの幾何学が論理的に並存可能である理由:
2つの幾何学の違いは「直線」の概念(あるいは「平行性」の概念)の解釈の違いに起因する。
ユークリッド幾何学における「直線」と非ユークリッド幾何学における「直線」とは、同じ「直線」という言葉をいながら別のものを指しているのである。

3. 比喩による非可換確率論の説明(続)

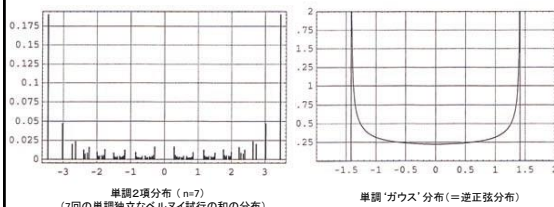
- 非可換確率論とは？
確率論の領域 ... 古典確率論 vs 非可換確率論
(常識的な確率論) (奇妙な確率論)
- 奇妙さの一例 ... 中心極限定理の性質
(a) 古典確率論では「独立な微小な誤差が無数に積み重なるとその分布は釣鐘状の形(ガウス分布)に近づいて行く」が正しい。(古典中心極限定理)
(b) 自由確率論では「独立」な微小な誤差が無数に積み重なるとその分布は半円形(ウィグナー半円分布)に近づいて行く」が正しい。(自由中心極限定理)
※ 自由確率論は非可換確率論のうちの一つ。80年代初頭に「ヴォイクレスク」により発見された。
- (一見したところ)互いに相容れない2つの確率論が論理的に並存可能である理由:
2つの確率論の違いはランダム量に対する「独立性」の概念の解釈の違いに起因する。
古典確率論における「独立性」と自由確率論における「独立性」とは、同じ「独立」という言葉を用いながら別のものを指しているのである。
- いろいろな独立性概念
→ 古典独立性、自由独立性、プール独立性、単調独立性
→ いろいろな確率論(確率論の「パラレルワールド」)
古典確率論、自由確率論、プール確率論、単調確率論
※ 単調独立性の概念とそれに基づいた単調確率論は筆者が2000年頃に発見したものである。

4. 単調中心極限定理

筆者の発見した単調確率論においては、中心極限定理は次のような形をとる:

「独立」な微小な誤差が無数に積み重なるとその分布は角が2本ある形の分布(逆正弦分布)に近づいて行く(単調中心極限定理)

※ 以下に、単調2項分布(= n 個の単調独立な (± 1) -値ランダム量の和の分布)のグラフと、その $n \rightarrow \infty$ での中心極限分布である単調ガウス分布(=逆正弦分布)のグラフを掲げておく



5. 4つの確率論の対照表

- (説明は省くが)実は、それぞれの独立性概念に基づいてそれぞれの確率論を「パラレル」に構築できる。
- 最後に、古典確率論における各種の概念がそれぞれの確率論の中でどのような概念に対応するのかを整理した対照表を掲げておく。(なお、用語の詳細については説明を省いた。)

	古典確率論	自由確率論	プール確率論	単調確率論
独立性の概念 (普遍計算規則)	古典独立性 (可換独立性)	自由独立性	プール独立性	単調独立性
キュムラント	古典キュムラント	自由キュムラント	プールキュムラント	単調キュムラント
畳み込み (Fourier変換)	古典畳み込み (Fourier変換)	自由畳み込み (R変換)	プール畳み込み	単調畳み込み (逆数Cauchy変換)
中心極限定理	古典中心極限定理	自由中心極限定理	プール中心極限定理	単調中心極限定理
ガウス分布 (中心極限分布)	正規分布	Wigner半円分布	Bernoulli分布	逆正弦分布
ブラウン運動	古典ブラウン運動	自由ブラウン運動	プールブラウン運動	単調ブラウン運動
フォック空間	ボソンのフォック空間	自由フォック空間	プールのフォック空間	単調フォック空間
ポアン分布 (少数の法則)	古典ポアン分布 (Marchenko-Pastur)	自由ポアン分布	プールのポアン分布	単調ポアン分布 (Lambert W 関数)
レヴィ・ヒンテン公式	古典LK公式	自由LK公式	プールのLK公式	単調LK公式