令和4年度　一般選抜・後期

ソフトウェア情報学部

数　　　　学 (120分)

注 意 事 項

1 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2 この冊子は，4ページあります。

3 試験中に問題冊子及び解答用紙の印刷不鮮明，ページの脱落などがあった場合は，手を挙げて試験監督者に知らせなさい。

4 解答は，必ず黒鉛筆(シャープペンシルも可)で記入し，ボールペン・万年筆・定規などを使用してはいけません。

5 解答用紙には，氏名及び受験票と同じ受験番号を忘れずに記入しなさい。

6 解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に，途中の式なども省略せずに記入しなさい。解答用紙の裏面に記入してはいけません。

7 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えなさい。

[問 1] $x^3=1$ の虚数解のひとつを ω とするとき，次の設問に答えなさい。

(1) $\omega+\dfrac{1}{\omega}$ の値を求めなさい。

(2) $\omega^7+\dfrac{1}{\omega^7}$ の値を求めなさい。

(3) n を正の整数とするとき，$\omega^n+\dfrac{1}{\omega^n}$ を求めなさい。

[問 2] x を正の実数とする。このとき，$\left(x-\dfrac{1}{6}\right)\left(6-\dfrac{4}{x}\right)$ の最小値とそのときの x の値を求めなさい。

[問 3] a，b，c，d はそれぞれ 0 以上の実数である。このとき，

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$

が成り立つことを示しなさい。

2 正の実数 p, q に対して，座標空間内の原点 O と 3 点 $A(p,p,0)$, $B(p,-p,0)$, $C(1,1,q)$ を考える。このとき，以下の問いに答えなさい。

[問 1] 座標空間内の点 $D(p,0,0)$ に対して，$\overrightarrow{OD} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ となる実数 s, t をそれぞれ求めなさい。

[問 2] 座標空間内の点 P を，実数 u, v に対して

$$\overrightarrow{OP} = u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB}, \quad 0 \leqq u \leqq 1, \quad 0 \leqq v \leqq 1$$

を満たす点とする。このとき，P の動く領域の面積を p を用いて表しなさい。

[問 3] O, A, B を通る平面に，C から垂線を下ろしたとき，この平面と垂線の交点の座標を求めなさい。

[問 4] $p+q=9$ であるとき，四面体 OABC の体積の最大値と，そのときの p, q の値をそれぞれ答えなさい。

3 非負整数 n について，次の関数 $f(n)$ を考える。

$$f(0)=0,\quad f(n)=\begin{cases} f\left(\dfrac{n}{2}\right) & (n\text{ が偶数のとき})\\ f\left(\dfrac{n-1}{2}\right)+1 & (n\text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

以下の問いに答えなさい。

[問 1]　$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$ の値をそれぞれ求めなさい。

[問 2]　$m=46$ とするとき，次の設問に答えなさい。

(1) $f(m)$ の値を求めなさい。

(2) m を二進法で表しなさい。

[問 3]　$f(j)=3$ となる非負整数 j について，3 番目に小さい値を十進法で答えなさい。

[問 4]　正の整数 k について，$f(2^k-1)=k$ となることを証明しなさい。

4 以下の問いに答えなさい。

[問 1]　次の関数 $f(x)$ が，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において $f(x) \geqq 0$ であることを証明しなさい。

$$f(x) = x - \sin x$$

[問 2]　次の関数 $g(x)$ が，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において $g(x) \geqq 0$ であることを証明しなさい。

$$g(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$$

[問 3]　次の不等式を証明しなさい。

$$1 - \frac{1}{e} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x}\,dx \leqq \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$